T O P O L O G I A
WPPT I, sem. letni

EGZAMIN POPRAWKOWY

Wrocław, **poniedziałek 23** czerwca 2008

ZADANIE 1. (7p)
Dana jest przestrzeń i dwie metryki d_1 i d_2. Pokaż, na odpowiednim przykładzie, że $d(x,y) = \min\{d_1(x,y), d_2(x,y)\}$ nie musi być metryką.

ROZW.
Na przykład przestrzeń trzypunktowa $\{a,b,c\}$. Metryka d_1 taka jak zwykła metryka na prostej dla $\{0,1,3\}$ a d_2 taka jak dla $\{0,2,3\}$. Wtedy

$$d(a,b) = 1, \quad d(b,c) = 1 \text{ oraz } d(a,c) = 3,$$

co przeczy warunkowi trójkąta.

ZADANIE 2. (8p)
Udowodnij, że ciąg (x_n) spełniający $\lim_n d(x_n, x_{n+1}) = 0$ i taki, że dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ podciąg (x_{kn}) (co k-ty wyraz) jest podstawowy, jest podstawowy.

ROZW.
Ustalmy $\epsilon > 0$. Niech n_0 będzie takie, że dla każdego $n \geq n_0$ mamy $d(a_n, a_{n+1}) < \frac{\epsilon}{4k}$. Niech N będzie tak duże, że dla $n, m \geq N$ $d(a_{km}, a_{kn}) < \frac{\epsilon}{2}$. Niech $N_0 = \max\{n_0, kN\}$. Niech $i, j \geq N_0$. Weźmy najmniejsze liczby $kn \geq i, km \geq j$. Oczywiście $kn - i \leq k$ oraz $km - j \leq k$. Mamy

$$\begin{gathered} d(x_i, x_j) \leq d(x_i, x_{i+1}) + d(x_{i+1}, x_{i+2}) + \cdots + d(x_{kn-1}, x_{kn}) + \\ d(x_{kn}, x_{km}) + \\ d(x_{km}, x_{km-1}) + d(x_{km-1}, x_{km-2}) + \cdots + d(x_{j+1}, x_j) \leq \\ k\frac{\epsilon}{4k} + \frac{\epsilon}{2} + k\frac{\epsilon}{4k} = \epsilon. \end{gathered}$$

ZADANIE 3. (8p)
Udowodnij, że jeśli $f : X \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą rzeczywistą o dziedzinie zwartej, to istnieje punkt $x_0 \in X$ taki, że $f(x_0) = \sup_{x \in X} f(x)$.

ROZW.
Niech $y = \sup_{x \in X} f(x)$ (*a priori* dopuszczamy nawet nieskończoność). Istnieje ciąg x_n taki, że $f(x_n) \to y$. Ze zwartości X ciąg x_n ma podciąg x_{n_k} zbieżny do jakiegoś $x_0 \in X$. Oczywiście nadal $f(x_{n_k}) \to y$. Z ciągłości f mamy też $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$. Z jedyności granicy wynika więc, że $y = f(x_0)$, i o to chodziło. (W szczególności y nie może być nieskończone, bo f przyjmuje wartości rzeczywiste.)

ZADANIE 4. (8p)
Znajdź granicę ciągu rekurencyjnego $a_1 = 5$, $a_{n+1} = \frac{3}{4(a_n+1)}$.

ROZW.
Funkcja $f(x) = \frac{3}{4}\frac{1}{x+1}$ przeprowadza przestrzeń $X = [0, \infty)$ w siebie. Pochodną jest

$f'(x) = \frac{3}{4}\frac{-1}{(x+1)^2}$ co na ma moduł X stale mniejszy od $\frac{3}{4}$, zatem jest to odwzorowanie zbliżające. Punkty stałe znajdujemy rozwiązując równanie kwadratowe $x = \frac{3}{4}\frac{1}{x+1}$. Wychodzą dwa pierwiastki, $x_0 = \frac{1}{2}$ i $x_1 = -\frac{3}{2}$. Tylko x_0 należy do X. Nasz ciąg jest ciągiem iteracji funkcji startującym z punktu $5 \in X$, zatem z Tw. Banacha zbiega on do $x_0 = \frac{1}{2}$.

ZADANIE 5. (6p)
Udowodnij, że jeśli $f : X \to Y$ jest funkcją ciągłą, to przeciwobraz zbioru typu G_δ w Y jest typu G_δ w X.

ROZW.
Niech $G = \bigcap_n U_n$ będzie zbiorem typu G_δ w Y (każdy U_n jest otwarty w Y).
UWAGA: Przeliczalny przekrój zbiorów otwartych NIE MUSI być otwarty! Gdyby tak było, pojęcie zbioru typu G_δ nie miałoby sensu!
Ale dla dowolnej funkcji mamy

$$f^{-1}(\bigcap_n U_n) = \bigcap_n f^{-1}(U_n).$$

Dalej, z ciągłości f każdy zbiór $f^{-1}(U_n)$ jest otwarty w X (jako przeciwobraz zbioru otwartego U_n). Zatem $f^{-1}(G)$ jawi się jako przekrój zbiorów otwartych w X, czyli jest typu G_δ.

ZADANIE 6. (7p)
Podaj przykład jakiegokolwiek odwzorowania ciągłego i ,,na" $f : \mathbb{D} \to \mathbb{T}$, gdzie $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1\}$ a $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

ROZW.
Koło ,,prasujemy" do odcinka $[-1, 1]$: $h(z) = \mathrm{Re}(z)$, następnie odcinek ,,nawijamy" na okrąg: $g(t) = e^{i\pi t}$ (punkty -1 i 1 sklejają się, odwzorowanie jest ,,na" cały okrąg). Oba powyższe odwzorowania są ciągłe. Składając je dostajemy poszukiwane odwzorowanie $g \circ h(z) = e^{i\pi \mathrm{Re}(z)}$. Jest to oczywiście jedna z wielu możliwości, na przykład można zacząć od $\mathrm{Im}(z)$, a nawijać można ,,wielokrotnie" biorąc $e^{i\alpha t}$ (z dowolnym parametrem rzeczywistym $\alpha > \pi$).
UWAGA: Wszelkie próby odwzorowania, które ,,nie rusza" punktów na okręgu, a punkty wewnętrzne koła jakoś rozmieszcza na okręgu będą NIECIĄGŁE! (najczęściej w punkcie 0). Koło trzeba bowiem wtedy gdzieś ,,przedziurawić".

ZADANIE 7. (6p)
Podaj definicję funkcji I klasy Baire'a.

ROZW.
Musi istnieć ciąg funkcji ciągłych f_n zbieżny PUNKTOWO do f.

Tomasz Downarowicz